

Chapter 8 Quadrilaterals (चतुर्भुज)

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1.

एक चतुर्भुज के कोण $3 : 5 : 9 : 13$ के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल :

चतुर्भुज के कोणों का अनुपात $3 : 5 : 9 : 13$ है।

अतः माना कि चतुर्भुज के कोण क्रमशः $3x$, $5x$, $9x$ और $13x$ हैं।

चतुर्भुज के (अन्तः) कोणों का योग $= 360^\circ$

$$3x + 5x + 9x + 13x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 30x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 12^\circ$$

$$\text{पहला कोण} = 3x = 3 \times 12 = 36^\circ$$

$$\text{दूसरा कोण} = 5x = 5 \times 12 = 60^\circ$$

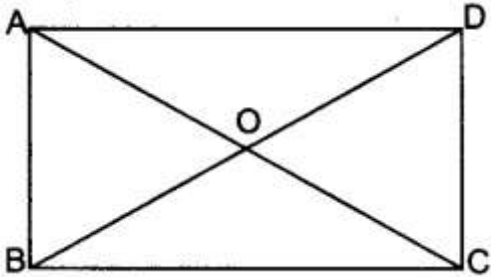
$$\text{तीसरा कोण} = 9x = 9 \times 12 = 108^\circ$$

$$\text{तथा चौथा कोण} = 13x = 13 \times 12 = 156^\circ$$

अतः चतुर्भुज के कोण क्रमशः 36° , 60° , 108° व 156° हैं।

प्रश्न 2.

यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। जिसमें विकर्ण $AC = BD$ है। विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु O है।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD हैं जो O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

तथा $AC = BD$

$$AO + OC = BO + OD \text{ (चित्र से) } \dots(1)$$

AC और BD समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं और बिन्दु O पर काटते हैं।

$$AO = OC \text{ और } BO = OD \dots\dots(2)$$

तब समीकरण (1) व (2) से,

$$AO + AO = BO + BO$$

$$\Rightarrow AO = BO$$

$$AO = BO = CO = OD$$

तब $\triangle OAD$ में,

$$AO = OD$$

$\Rightarrow \angle ADO = \angle DAO$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

$\angle AOB$, $\triangle OAD$ का बहिष्कोण है।

$$\angle AOB = \angle DAO + \angle ADO$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle DAO + \angle DAO (\angle ADO = \angle DAO)$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 2 \angle DAO \dots (3)$$

और $\triangle OAB$ में भी, $AO = OB \Rightarrow \angle ABO = \angle BAO$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

$\angle AOD$, $\triangle OAB$ का बहिष्कोण है,

$$\angle AOD = \angle BAO + \angle ABO$$

$$\angle AOD = \angle BAO + \angle BAO (\angle ABO = \angle BAO)$$

$$\angle AOD = 2 \angle BAO \dots (4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$\angle AOB + \angle AOD = 2 \angle DAO + 2 \angle BAO$$

$$\Rightarrow \angle BOD = 2 (\angle DAO + \angle BAO) = 2 \angle BAD \text{ (चित्र से)}$$

$$2 \angle BAD = 180^\circ \text{ (क्योंकि BOD एक रज्जु रेखा है।)}$$

$$\angle BAD = 90^\circ$$

चतुर्भुज ABCD में $\angle A = 90^\circ$

चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

तथा $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (अन्तःकोणों का योग)

$$\angle D = \angle A = 90^\circ (\angle A = 90^\circ)$$

तब $\angle B$ और $\angle C$ में से भी प्रत्येक 90° होगा।

समान्तर चतुर्भुज ABCD में, $AB = CD$ और $BC = DA$

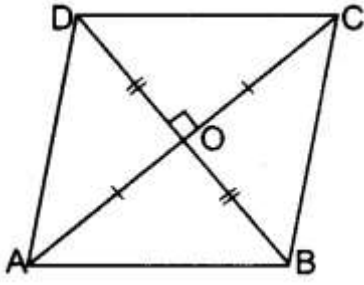
$$\text{और } \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

Proved.

प्रश्न 3.

दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।



हल :

ज्ञात है : एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिन्दु O पर परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

अर्थात् $\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$

तथा $OA = OC$ तथा $OB = OD$

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति: $\triangle AOD$

तथा $\triangle COB$ में, $OA = OC$ (दिया है।)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण हैं।)

$OD = OB$ (दिया है।)

$\triangle AOD = \triangle COB$ (S.A.S. से)

$\angle OAD = \angle OCB$ (C.P.C.T.)

परन्तु $\angle OAD = \angle CAD$

तथा $\angle OCB = \angle ACB$

$\angle CAD = \angle ACB$

इससे प्रदर्शित होता है कि AD और BC को तिर्यक रेखा AC द्वारा काटने पर बने एकान्तर अन्तः कोण CAD तथा ACB बराबर हैं जो केवल तभी सम्भव है जबकि AD एवं BC एक-दूसरे के समान्तर हों।

AD एवं BC एक-दूसरे के समान्तर हैं। ... (1)

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि AB एवं DC एक-दूसरे के समान्तर हैं।

इस प्रकार सिद्ध हुआ कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब हम दिखाएँगे कि $AB = BC = CD = DA$

$\triangle AOD$ तथा $\triangle COD$ में,

$OA = OC$ (दिया है।)

$\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$ (दिया है।)

$OD = OD$ (उभयनिष्ठ है।)

$\triangle AOD = \triangle COD$ (S.A.S. से)

$AD = CD$ (C.P.C.T.)

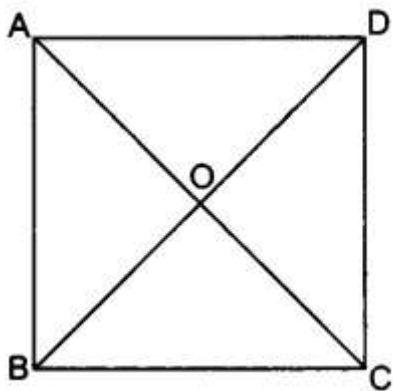
इससे प्रदर्शित होता है कि ABCD एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसकी क्रमागत भुजाओं का एक युग्म AD, CD बराबर है।

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है।

Proved.

प्रश्न 4.

दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं। सिद्ध करना है:
 $AC = BD$ और $\angle AOB$ एक समकोण या 90° उपपत्ति: चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

$$AB = BC = CD = DA$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

तब $\triangle ABC$ और $\triangle DCB$ समकोण त्रिभुज हैं।

अब $\triangle ABC$ और $\triangle DCB$ में,

$$AB = DC \text{ (वर्ग की भुजाएँ हैं।)}$$

$$\angle B = \angle C \text{ (प्रत्येक } 90^\circ \text{)}$$

$$BC = BC \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$\triangle ABC = \triangle DCB \text{ (S.A.S. से)}$$

$$AC = BD \text{ (C.P.C.T.)}$$

चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AB = CD \text{ और } BC = DA$$

चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज भी है।

इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर (बिन्दु O पर) समद्विभाजित करेंगे।

$$AO = BO = CO = DO$$

अब $\triangle AOB$ और $\triangle COB$ में,

$$AO = CO \text{ (ऊपर सिद्ध किया है।)}$$

$$AB = CB \text{ (वर्ग की भुजाएँ हैं।)}$$

$$BO = BO \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$\triangle AOB = \triangle COB \text{ (S.S.S. से)}$$

$$\angle AOB = \angle COB \text{ (C.P.C.T.) ... (1)}$$

परन्तु AOC (विकर्ण) एक ऋजु रेखा है,

$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$$

समीकरण (1) व (2) के हल से,

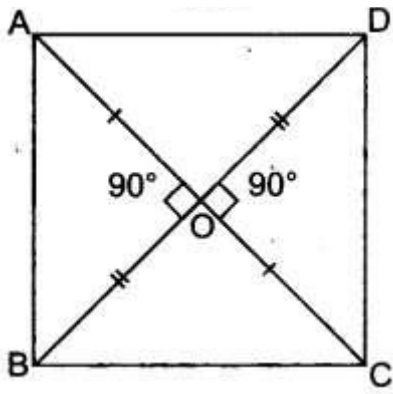
$$\angle AOB = \angle COB = 90^\circ$$

अतः वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

Proved.

प्रश्न 5.

दर्शाइए कि यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और वे परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करें तो वह एक वर्ग होता है।



हल :

दिया है: ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC और BD बराबर हैं तथा एक-दूसरे को बिन्दु O पर इस प्रकार काटते हैं कि $AO = OC$ तथा $BO = OD$ तथा $AC \perp BD$

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं।

चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$AB = CD \dots(1)$$

$$\text{तथा } AB \parallel CD \dots(2)$$

अब $\triangle ABC$ और $\triangle DCB$ में,

$$AB = DC \text{ (ऊपर सिद्ध किया है।)}$$

$$AC = DB \text{ (दिया है।)}$$

$$BC = BC \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$\triangle ABC = \triangle DCB \text{ (S.S.S. से)}$$

$$\angle B = \angle C \text{ (C.P.C.T.) } \dots(3)$$

$AB \parallel CD$ समीकरण (2) से, और BC एक तिर्यक प्रतिच्छेदी रेखा है।

$$\angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (अन्तःकोणों का योग) } \dots(4)$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle B = 90^\circ \text{ और } \angle C = 90^\circ$$

इस प्रकार चतुर्भुज ABCD एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण 90° है।

$AC = BD$ और ये बिन्दु O पर परस्पर समद्विभाजित होते हैं।

$$AO = BO = CO = DO$$

$$AC \perp BD \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \text{ तथा } \angle BOC = 90^\circ$$

तब $\triangle AOB$ तथा $\triangle COB$ में,

$$AO = CO \text{ (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)}$$

$$\angle AOB = \angle COB \text{ (प्रत्येक समकोण है।)}$$

$$BO = BO \text{ (दोनों त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$\triangle AOB = \triangle COB \text{ (S.A.S. से)}$$

$$AB = BC \text{ (C.P.C.T.)}$$

तब चतुर्भुज ABCD में,

$$AB = BC, AB = CD \text{ और } BC = DA$$

$$AB = BC = CD = DA \text{ और } \angle B = 90^\circ$$

अर्थात् चारों भुजाएँ बराबर हैं और अन्तःकोण समकोण हैं।

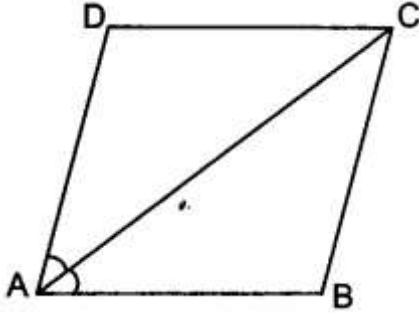
अतः चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

Proved.

प्रश्न 6.

समान्तर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि

- (i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।
- (ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है

अर्थात् $\angle BAC = \angle DAC$

सिद्ध करना है :

(i) विकर्ण AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : (i) चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel DA$

$AB \parallel CD$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle BAC = \angle ACD$ (एकान्तर कोण) ... (1)

इसी प्रकार, $BC \parallel DA$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

$\angle DAC = \angle ACB$ (एकान्तर कोण) ... (2)

AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

$\angle BAC = \angle DAC$

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle ACB = \angle ACD$

अर्थात् AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करती है।

(ii) $\angle BAC = \angle DAC$ और $\angle DAC = \angle ACB$

$\angle BAC = \angle ACB$

तब $\triangle ABC$ में,

$\angle BAC = \angle ACB$

$BC = AB$ (त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।)

परन्तु ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AB = CD$ तथा $BC = DA$

$AB = BC = CD = DA$

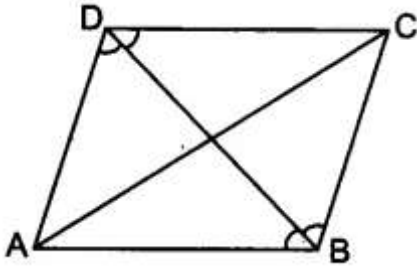
चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज होगा।

Proved.

प्रश्न 7.

ABCD एक समचतुर्भुज है। दर्शाइए विकर्ण AC कोणों A और C दोनों को समद्विभाजित करता है तथा विकर्ण BD, कोणों B

और D दोनों को समद्विभाजित करता है।



हल :

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है।।

सिद्ध करना है : विकर्ण AC, $\angle A$ और $\angle C$ दोनों को समद्विभाजित करता है

तथा विकर्ण BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है।

$$AB = BC = CD = DA$$

$\triangle ABC$ में,

$AB = BC$ के $\angle ACB = \angle BAC \dots(1)$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है।

$AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।

$$\angle BAC = \angle ACD \text{ (एकान्तर कोण) } \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\angle ACB = \angle ACD \text{ (एकान्तर कोण) } \dots(3)$$

अर्थात् AC, $\angle C$ का समद्विभाजक है।

$BC \parallel DA$ तथा AC तिर्यक रेखा है के

$$\angle ACB = \angle DAC \text{ (एकान्तर कोण) } \dots(4)$$

तब समीकरण (1) व (4) से,

$$\angle DAC = \angle BAC$$

अर्थात् AC, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अतः AC, $\angle A$ व $\angle C$ दोनों का समद्विभाजक है।

$BC \parallel DA$ और BD तिर्यक रेखा है।

$$\angle ADB = \angle CBD \text{ (एकान्तर कोण) } \dots(5)$$

इसी प्रकार $\angle ABD = \angle BDC$ (एकान्तर कोण) $\dots(6)$

और : $\triangle BCD$ में,

$$BC = CD \Rightarrow \angle BDC = \angle CBD \dots(7)$$

(त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

तब समीकरण (5) व (7) से,

$$\angle ADB = \angle BDC$$

अर्थात् BD, $\angle D$ का समद्विभाजक है।

समीकरण (6) व (7) से,

$$\angle ABD = \angle CBD$$

अर्थात् BD, $\angle B$ का समद्विभाजक है।

BD, $\angle B$ व $\angle D$ दोनों का समद्विभाजक है।

अतः विकर्ण AC, $\angle A$ व $\angle C$ को समद्विभाजित करता है और BD, $\angle B$ व $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

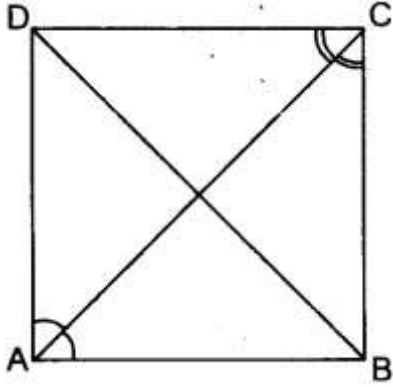
Proved.

प्रश्न 8.

ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A व C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि

(i) ABCD एक वर्ग है।

(ii) BD, दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ व $\angle C$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

BD आयत का दूसरा विकर्ण है।

सिद्ध करना है :

(i) चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

(ii) BD, $\angle B$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : (i) चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

$AB = CD$ तथा $\angle A = 90^\circ$

विकर्ण AC, $\angle A$ तथा $\angle C$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

$\angle BAC = \angle DAC$ और $\angle BCA = \angle DCA$

$\triangle ABC$ तथा $\triangle ADC$ में,

$\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है।)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\angle BCA = \angle DCA$ (दिया है।)

$\triangle ABC = \triangle ADC$ (A.S.A. से)

$AB = DA$ (C.P.C.T.) ... (1)

चतुर्भुज ABCD में,

$AB = CD$; $BC = DA$;

$AB = BC = CD = DA$

तथा $\angle A = 90^\circ$ [समीकरण (1) से]

अतः चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

Proved.

(ii) $\triangle ABCD$ में,

$BC = CD \Rightarrow \angle BDC = \angle CBD$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

अब वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती हैं।

अर्थात् $AB \parallel CD$ और BD तिर्यक रेखा है।

$\angle BDC = \angle ABD$ (एकान्तर कोण) ... (2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle ABD = \angle CBD$

अर्थात् BD, $\angle B$ का समद्विभाजक है।

इसी प्रकार, $BC \parallel DA$ और BD तिर्यक रेखा है।

$$\angle CBD = \angle ADB \text{ (एकान्तर कोण) } \dots (3)$$

समीकरण (1) व (3) से,

$$\angle BDC = \angle ADB$$

अर्थात् BD , $\angle D$ का समद्विभाजक है।

अतः BD , $\angle B$ तथा $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

Proved.

प्रश्न 9.

समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है। दर्शाइए कि

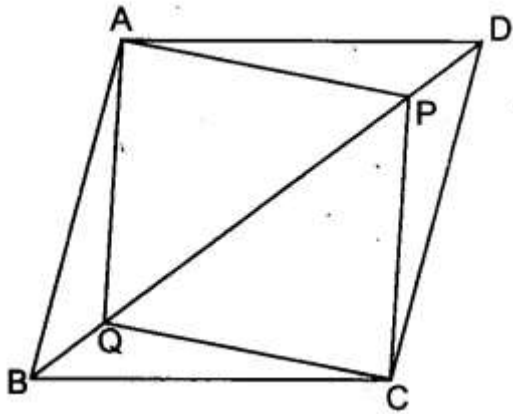
(i) $\triangle APD = \triangle CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\triangle AQB = \triangle CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है और BD उसका एक विकर्ण है।

BD पर P और Q दो बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है।

AP , AQ , CP वे C रेखाखण्ड खींचे गए हैं जिनसे चतुर्भुज $APCQ$ बनता है।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle APD = \triangle CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\triangle AQB = \triangle CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : चतुर्भुज $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है।

$AB = CD$ तथा और

$AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel DA$

(i) $BC \parallel DA$ और BD एक तिर्यक रेखा है।

$$\angle ADB = \angle CBD \Rightarrow \angle ADP = \angle CBQ \text{ (एकान्तर कोण)}$$

अब, $\triangle APD$ और $\triangle CQB$ में,

$$DA = BC \text{ (दिया है)}$$

$$\angle ADP = \angle CBQ \text{ (ऊपर सिद्ध किया है)}$$

$$DP = BQ \text{ (दिया है)}$$

$$\triangle APD = \triangle CQB \text{ (S.A.S. से)}$$

Proved.

$$(ii) \triangle APD = \triangle CQB$$

$$AP = CQ \text{ (C.P.C.T.)}$$

Proved.

(iii) $AB \parallel CD$ और BD तिर्यक रेखा है।

$$\angle ABD = \angle BDC \text{ के } \angle ABQ = \angle PDC \text{ (एकान्तर कोण)}$$

अब $\triangle AQB$ और $\triangle CPD$ में, $AB = CD$ (दिया है।)

$$\angle ABQ = \angle PDC \text{ (ऊपर सिद्ध किया है।)}$$

$$BQ = DP \text{ (दिया है।)}$$

$$\triangle AQB = \triangle CPD \text{ (S.A.S. से)}$$

Proved.

$$(iv) \triangle AQB = \triangle CPD$$

$$AQ = CP \text{ (C.P.C.T.)}$$

Proved.

(v) चतुर्भुज $APCQ$ में सम्मुख भुजाएँ $AP = CQ$ और $AQ = CP$ [भाग (i) तथा (iv) से]

अतः चतुर्भुज $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

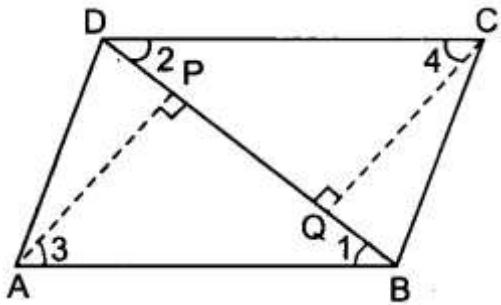
Proved.

प्रश्न 10.

$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं। दर्शाइए कि

$$(i) \triangle APB = \triangle CQD$$

$$(ii) AP = CQ$$



हल :

दिया है: चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण BD है।

BD पर शीर्ष A से AP और शीर्ष C से CQ लम्ब खींचा गया है।

सिद्ध करना है :

$$(i) \triangle APB = \triangle CQD$$

$$(ii) AP = CQ$$

उपपत्ति:

(i) चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$AB = CD \text{ तथा } AB \parallel CD$$

$AB \parallel CD$ और विकर्ण BD एक तिर्यक रेखा है।

$$\angle ABD = \angle BDC \text{ (एकान्तर कोण)}$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$AP \perp BD \Rightarrow \angle APB = 90^\circ$$

$\triangle APB$ में, $\angle PAB = 180^\circ - (\angle APB + \angle ABP)$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है।)

$$\angle PAB = 180^\circ - (90^\circ + \angle 1) = 90^\circ - \angle 1$$

$$\angle 3 = 90^\circ - \angle 1$$

इसी प्रकार, $CQ \perp BD \Rightarrow \angle CQD = 90^\circ$

$\triangle CQD$ में,

$$\angle QCD = 180^\circ - (\angle CQD + \angle CDQ)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \angle 2 = 90^\circ - \angle 2$$

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 1 \quad (\angle 1 = \angle 2)$$

$$\angle 3 = 90^\circ - \angle 1 \text{ और } \angle 4 = 90^\circ - \angle 1$$

$$\angle 3 = \angle 4 \dots (2)$$

तब $\triangle APB$ और $\triangle CQD$ की तुलना करने पर,

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$AB = CD \text{ (दिया है)}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ [समीकरण (2) से]}$$

$$\triangle APB = \triangle CQD \text{ (A.S.A. से)}$$

Proved.

$$(ii) \triangle APB = \triangle CQD$$

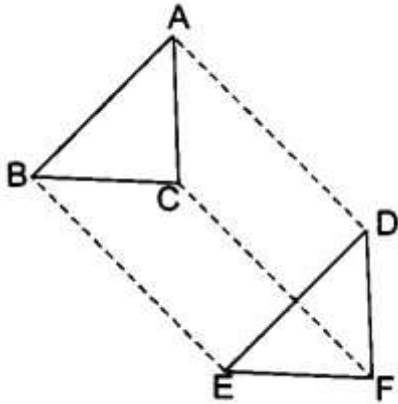
$$AP = CQ \text{ (C.P.C.T.)}$$

Proved.

प्रश्न 11.

$\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में, $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ और $BC \parallel EF$ है। शीर्षों A, B और C को क्रमशः शीर्षों D, E और F से जोड़ा जाता है। दर्शाइए कि

- (i) चतुर्भुज ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (ii) चतुर्भुज BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है।
- (iv) चतुर्भुज ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (v) $AC = DF$ है।
- (vi) $\triangle ABC = \triangle DEF$ है।



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ दो त्रिभुज हैं जिनमें $AB = DE$ और $AB \parallel DE$ तथा $BC = EF$ और $BC \parallel EF$ हैं। शीर्षों A, B व C को क्रमशः शीर्षों D, E व F से ऋजु रेखाखण्डों द्वारा जोड़ा गया है।

सिद्ध करना है :

- (i) चतुर्भुज ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (ii) चतुर्भुज BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है।
- (iv) चतुर्भुज ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है।
- (v) $AC = DF$ है।

(vi) $\triangle ABC = \triangle DEF$ है।

उपपत्ति :

(i) चतुर्भुज ABED में,

$AB = DE$ और $AB \parallel DE$

चतुर्भुज ABED की सम्मुख भुजाओं AB व DE का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

अतः चतुर्भुज ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।

Proved.

(ii) चतुर्भुज BEFC में, $BC = EF$ और $BC \parallel EF$

चतुर्भुज BEFC की सम्मुख भुजाओं BC और EF का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

अतः चतुर्भुज BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।

Proved.

(iii) चतुर्भुज ABED समान्तर चतुर्भुज है।

$AD = BE$ और $AD \parallel BE$ चतुर्भुज BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।

$BE = CF$

$BE \parallel CF$ दोनों को मिलाकर,

$AD = BE = CF$ और $AD \parallel BE \parallel CF$

अतः $AD = CF$ और $AD \parallel CF$

Proved.

(iv) चतुर्भुज ACFD में,

$AD = CF$ और $AD \parallel CF$

अर्थात् सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

अतः चतुर्भुज ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

Proved.

(v) चतुर्भुज ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सम्मुख भुजाओं के युग्म बराबर होंगे।

अतः $AC = DF$

Proved.

(vi) $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ की तुलना करने पर,

$AB = DE$ (दिया है।)

$AC = DF$ (अभी सिद्ध किया है।)

$BC = EF$ (दिया है।)

$\triangle ABC = \triangle DEF$ (S.S.S. से)

Proved.

प्रश्न 12.

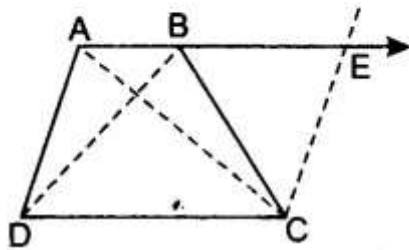
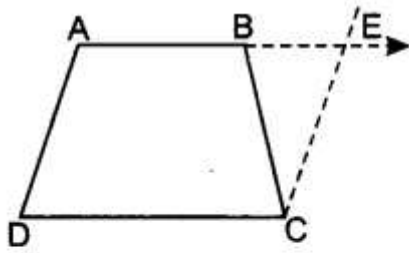
ABCD एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है। दर्शाइए कि

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\triangle ABC = \triangle BAD$

(iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD



हल :

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है।

सिद्ध करना है :

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\triangle ABC = \triangle BAD$

(iv) विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD

रचना : विकर्ण AC तथा BD खींचे।

AB को आगे बढ़ाया और बिन्दु C से DA के समान्तर रेखा खींची जो बढ़ी हुई ABP को बिन्दु E पर काटे।

उपपत्ति : (i) : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel DC$ और AB को बढ़ाया गया है।

$AE \parallel DC$ और $AD \parallel CE$ (रचना से) ... (2)

चतुर्भुज $ADCE$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\angle DAE = \angle DCE$ (सम्मुख कोण) ... (3)

$\angle ADC = \angle AEC$ (सम्मुख कोण) ... (4)

$AB \parallel DC$ और BC एक तिर्यक रेखा है

$\angle BCD = \angle CBE$ (एकान्तर कोण) ... (5)

चतुर्भुज $ADCE$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AD = CE$ परन्तु दिया है कि

$AD = BC$

$BC = CE$

$\angle BEC = \angle CBE$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।) ... (6)

अब समान्तर चतुर्भुज $ADCE$ में,

$\angle A = \angle DCE$ (समीकरण (3) से)

$= \angle BCD + \angle BCE$ (चित्र से)

$= \angle CBE + \angle BCE$ (समीकरण (5) से)

$= \angle BEC + \angle BCE$ (समीकरण (6) से)

$= \angle CBA$ ($\angle CBA$, $\triangle BCE$ का बहिष्कोण है।)

$\angle A = \angle B$ (समलम्ब $ABCD$ में)

Proved.

(ii) $AB \parallel CD$ और AD तिर्यक रेखा है।

$$\angle A + \angle D = 180^\circ \text{ (अन्तःकोणों का योग)}$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle A$$

$$\angle D = 180^\circ - \angle B [\angle A = \angle B \text{ भाग (i) से}]$$

इसी प्रकार, $AB \parallel CD$ और BC तिर्यक रेखा है।

$$\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ \text{ (अन्तःकोणों का योग)}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle B$$

तब $\angle C$ व $\angle D$ की तुलना करने पर,

$$\angle C = \angle D$$

Proved.

(iii) $\triangle ABC$ और $\triangle BAD$ में,

$$BC = AD \text{ (दिया है)}$$

$$\angle A = \angle B [\text{भाग (1) से}]$$

$$AB = AB \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है)}$$

$$\triangle ABC = \triangle BAD \text{ (S.A.S. से)}$$

$$(iv) \triangle ABC = \triangle BAD$$

$$AC = BD \text{ (C.P.C.T.)}$$

अतः समलम्ब का विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD

Proved.

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1.

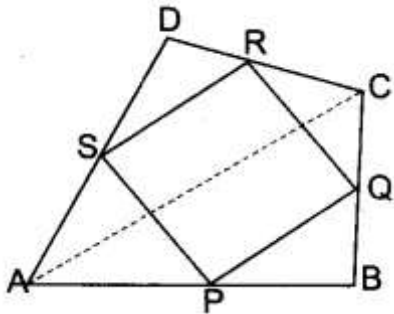
ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

$$(i) SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC \text{ है।}$$

AC है।

$$(ii) PQ = SR \text{ है।}$$

(iii) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD में P, Q, R व S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्ये-बिन्दु हैं।

P, Q, R व S को ऋजु रेखाखण्ड PQ, QR, RS व SP द्वारा जोड़कर चतुर्भुज PQRS प्राप्त किया गया है।

सिद्ध करना है :

$$(i) SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC$$

$$(ii) PQ = SR$$

(iii) PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : (i) $\triangle ACD$ में,

CD का मध्य-बिन्दु R तथा AD का मध्य-बिन्दु S है।

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर और तीसरी भुजा का आधा होता है।

अतः रेखाखण्ड $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ होगा। ... (1)

Proved.

(ii) $\triangle ABC$ में, AB का मध्य-बिन्दु P है और BC का मध्यबिन्दु Q है।

रेखाखण्ड $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$

अब (1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ और $PQ = SR$

अतः $PQ = SR$

Proved.

(iii) ऊपर सिद्ध हुआ है कि $PQ \parallel SR$ और $PQ = SR$

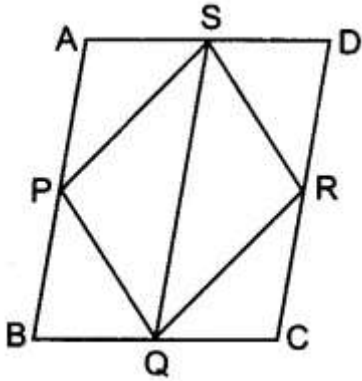
चतुर्भुज $PQRS$ में P और RS सम्मुख भुजाओं का युग्म है जो परस्पर बराबर भी है और समान्तर भी।

अतः चतुर्भुज $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज होगी।

Proved.

प्रश्न 2.

$ABCD$ एक समचतुर्भुज है और P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज $PQRS$ एक आयत है।



हल :

दिया है: $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। जिसकी भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य-बिन्दु क्रमशः P, Q, R, S हैं।

सिद्ध करना है : $PQRS$ एक आयत है।

रचना : रेखाखण्ड QS को मिलाया।

उपपत्ति : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है,

$AB = BC = CD = DA$

तथा $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD, DA के मध्य-बिन्दु हैं।

$AP = BP = BQ = CQ = CR = RD = DS = AS$

$\triangle APS$ और $\triangle QCR$ में,

$AP = CR$ (दिया है।)

$\angle A = \angle C$ (दिया है।)

$AS = CQ$ (दिया है।)

$\triangle APS = \triangle CRQ$ (S.A.S. से)

$PS = QR$ (C.P.C.T.) ... (1)

$\triangle PBQ$ तथा $\triangle RDS$ में,

$BP = DR$ (दिया है।)

$\angle B = \angle D$ (दिया है।)

$BQ = DS$ (दिया है।)

$\triangle PBQ = \triangle RDS$ (S.A.S. से)

$PQ = RS$ (C.P.C.T.) ... (2)

$AB \parallel CD$ और बिन्दु Q तथा S क्रमशः BC और DA के मध्य-बिन्दु हैं।

$QS \parallel AB$ तथा $QS = CD$

$QS \parallel AB$ और PS तिर्यक रेखा है।

$\angle PSQ = \angle APS$ (एकान्तर कोण)

परन्तु $\angle APS = \angle ASP$ ($AS = AP$)

$\angle PSQ = \angle ASP$... (3)

इसी प्रकार, $\angle RSQ = \angle DSR$... (4)

$\angle ASP + \angle PSQ + \angle RSQ + \angle DSR = 180^\circ$ (एक रेखा पर बने कोण)

$\angle PSQ + \angle PSQ + \angle RSQ + \angle RSQ = 180^\circ$ [समीकरण (3) व (4) से]

$2(\angle PSQ + \angle RSQ) = 180^\circ$

$2\angle S = 180^\circ$ या $\angle S = 90^\circ$

$(\angle S = \angle PSQ + \angle RSQ)$... (5)

समीकरण (1) और (2) से,

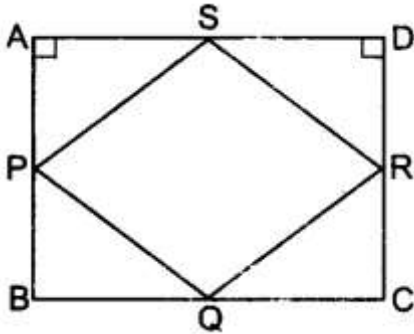
PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है और समीकरण (5) से उसका एक अन्तःकोण समकोण है।

अतः PQRS एक आयत है।

Proved.

प्रश्न 3.

ABCD एक आयत है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD एक आयत है जिसकी भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु क्रमशः P, Q, R और S हैं। रेखाखण्ड PG, QR, RS और SP एक चतुर्भुज PQRS बनाते हैं।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति: $\triangle APS$ और $\triangle DRS$ में,

$AS = DS$ (S, AD का मध्य-बिन्दु है)।

$\angle A = \angle D$ (आयत के अन्तःकोण)

$AP = DR$ (P, AB का तथा R, CD का मध्य बिन्दु है तथा $AB = CD$)

$\triangle APS = \triangle DRS$ (S.A.S. से)

$SP = SR$ (C.P.C.T.) ... (1)

$\triangle APS$ और $\triangle BPQ$ में,

$AP = BP$ (P, AB का मध्य-बिन्दु है)

$\angle A = \angle B$ (आयत के अन्तःकोण)

$AS = BQ$ ($AD = BC$ और S तथा Q इनके क्रमशः मध्य-बिन्दु हैं)

$\triangle APS = \triangle BPQ$ (S.A.S. से)

$SP = QP$ (C.P.C.T.) ... (2)

$\triangle APS$ और $\triangle CRQ$ में,

$AP = CR$ ($AP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = RC$) (प्रत्येक समकोण)

$\angle A = \angle C$

$AS = CQ$ ($AS = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = QC$)

$\triangle APS = \triangle CRQ$ (S.A.S. से)

$SP = QR$ (C.P.C.T.) ... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से,

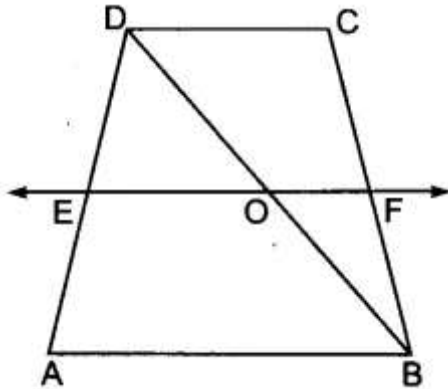
$SP = RS = PQ = QR$

$PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

Proved.

प्रश्न 4.

$ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel CD$ है। साथ ही BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिन्दु है। E से होकर एक रेखा AB के समान्तर खींची गई है जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।



हल :

दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel CD$ है। BD , समलम्ब $ABCD$ का एक विकर्ण है।

भुजा AD का मध्य-बिन्दु E है।

E से AB के समान्तर एक रेखा EF खींची गई है जो BC को बिन्दु F पर तथा BD को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है : F , BC का मध्य-बिन्दु है।

उपपत्ति : $\triangle ABD$ में, बिन्दु E भुजा AD का मध्य-बिन्दु है और चूँकि EF , AB के समान्तर है।

बिन्दु O , BD को समद्विभाजित करेगा अर्थात् O , भुजा BD का मध्य-बिन्दु है।

$AB \parallel CD$ और $EF \parallel AB$

$EF \parallel CD$ या $OF \parallel CD$

अब $\triangle BCD$ में,

O , BD को मध्य-बिन्दु है

और $OF \parallel CD$, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

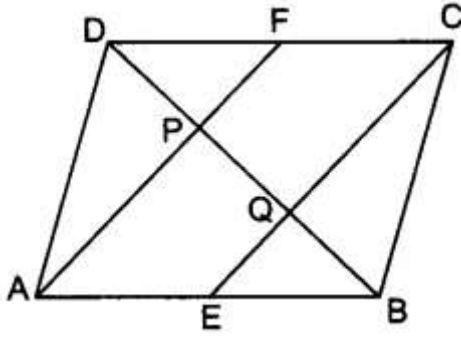
अतः F , BC का मध्य-बिन्दु है।

Proved.

प्रश्न 5.

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि रेखाखण्ड AF और

CE विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। बिन्दु E और F क्रमशः उसकी भुजाओं AB तथा CD के मध्य-बिन्दु हैं। उसका विकर्ण BD, रेखाखण्डों AF तथा CE से क्रमशः बिन्दुओं P और Q पर विभक्त होता है।

सिद्ध करना है : BD को AF और CE तीन बराबर भागों में बाँटते हैं

अर्थात् $DP = PQ = QB$

उपपत्ति : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AB \parallel CD$ तथा $AB = CD$

और E तथा F क्रमशः AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं।

$AE \parallel CF$ और $AE = CF$

AECF एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AF \parallel CE$ (1)

$AP \parallel EQ$... (2)

$PF \parallel CQ$... (3)

ΔDQC में, बिन्दु F, भुजा CD का मध्य-बिन्दु है। (ज्ञात है।)

और $PF \parallel CQ$ (समीकरण (3) से)

P, DQ का मध्य-बिन्दु है।

$DP = PQ$... (4)

पुनः ΔABP में, बिन्दु E भुजा AB का मध्य-बिन्दु है

और $EQ \parallel AP$ (समीकरण (2) से)

Q, BP का मध्य-बिन्दु है। $QB = PQ$... (5)

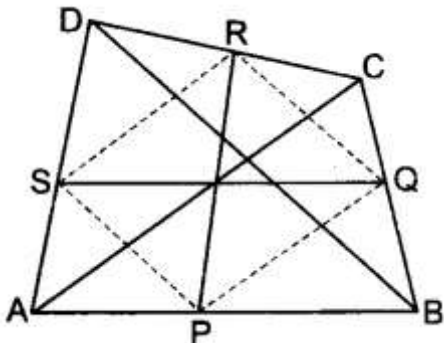
समीकरण (4) और (5) से, $DP = PQ = QB$

अतः रेखाखण्ड AF और CE, विकर्ण BD को तीन बराबर भागों में विभक्त करते हैं।

Proved.

प्रश्न 6.

दर्शाइए कि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु क्रमशः P, Q, R, S हैं।
सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य-बिन्दुओं P और R को मिलाकर रेखाखण्ड PR बनाता है
तथा BC और DA के मध्य-बिन्दुओं Q और S को मिलाकर रेखाखण्ड QS बनाता है।
सिद्ध करना है : PR और QS परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

रचना : रेखाखण्ड PQ, QR, RS और SP को मिलाइए
तथा विकर्ण AC और BD खींचिए।

उपपत्ति: $\triangle ABC$ में,

P, AB का तथा Q, BC का मध्य-बिन्दु है।

$$PQ = \frac{1}{2}AC \text{ और } PQ \parallel AC \dots(1)$$

पुनः $\triangle ACD$ में, R, CD का और S, DA का मध्य-बिन्दु है।

$$RS = \frac{1}{2}AC \text{ और } RS \parallel AC$$

$$PQ = RS \text{ और } PQ \parallel RS \text{ [समीकरण (1) व (2) से]}$$

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

समान्तर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR तथा SQ हैं।

अतः PR तथा SQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

Proved.

प्रश्न 7.

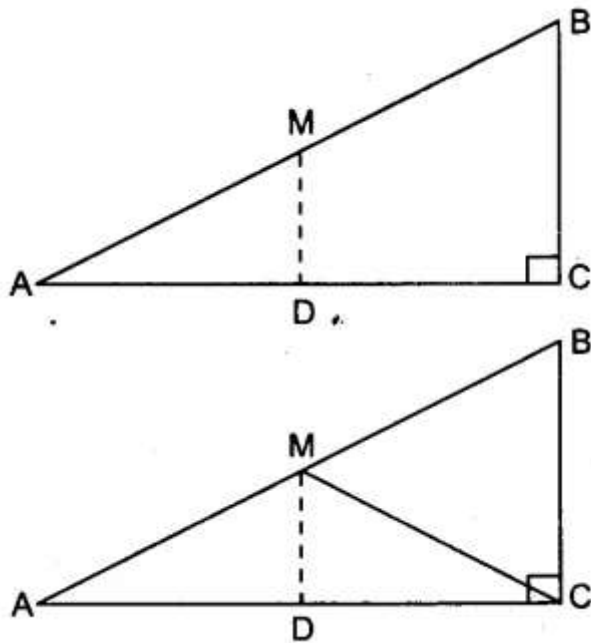
ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिन्दु M से होकर BC के समान्तर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि :

(i) D भुजा AC का मध्य-बिन्दु है।

(ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

है।



हल:

दिया है: $\triangle ABC$ में $\angle C$ समकोण है और AB कर्ण है जिसका मध्य-बिन्दु M है।

बिन्दु M से एक रेखा BC के समान्तर खींची गई है जो AC को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है :

(i) D भुजा AC का मध्य-बिन्दु है।

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

रचना : रेखाखण्ड CM खींचा।

उपपत्ति : (i) $\triangle ABC$ में,

M कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है और M से BC के समान्तर खींची गई रेखा AC को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करती है जिससे

$MD \parallel BC$ है।

अतः बिन्दु D, AC का मध्य-बिन्दु होगा।

Proved.

(ii) $MD \parallel BC$ और तिर्यक रेखा AC इन्हें प्रतिच्छेद करती है।

$\angle MDA = \angle C$

$\angle MDA = 90^\circ$

$MD \perp AD$ या $MD \perp AC$

अतः (iii) $\triangle MDA$ तथा $\triangle MDC$ में,

$AD = CD$ (D, AC का मध्य-बिन्दु है।)

$\angle MDA = \angle MDC$ ($MD \perp AC$)

$MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\triangle MDA = \triangle MDC$ (S.A.S. से)

$MA = CM$ (C.P.C.T.)

परन्तु M, AB का मध्य-बिन्दु है जिससे

$MA = \frac{1}{2}AB$

अतः $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

Proved.